



TITLE:

リー群が表すホモトピー要素について(非安定ホモトピー論の研究)

AUTHOR(S):

南, 春男

CITATION:

南, 春男. リー群が表すホモトピー要素について(非安定ホモトピー論の研究). 数理解析研究所講究録 1983, 505: 76-84

ISSUE DATE:

1983-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103729>

RIGHT:

リー群が表すホモトピー要素について

大阪市大 南 春男 (Haruo Minami)

コンパクト・連結リー群を G , その左不変な枠組を \mathcal{L} とする。ここで (G, \mathcal{L}) からトム・ポントリャーギン構成法によってえられるホモトピー要素 $[G, \mathcal{L}] \in \pi_{\alpha}^S$ (但し, $\alpha = \dim G > 0$) について一つの補足(命題1)とこれまでの結果及びその二, 三について証明に用いられた主な道具を紹介する。

1. 命題1 G がその固定集合 K の余次元が奇数であるような対合的自己同型をもつとき,

$$[G, \mathcal{L}]_{(odd)} = 0.$$

例 この命題が適用出来る G としては, $SU(4n+3)$, $SU(4n)$, $SO(2n)$, $Spin(2n)$ がある。

この内 $SO(2n)$ については後で述べるように Becker-Schultz によって $\mathcal{L}[SO(2n), \mathcal{L}] = 0$ であることが知られている。また次に示す Ossa の定理から命題が意味をもつのは3-成分のみ

である。

2. $[G, \mathcal{L}]$ の位数の評価で最も一般的なものは次の Ossa の結果である。

定理 (Ossa [6], 1982) $\gamma_2[G, \mathcal{L}] = 0$ 。

定義から次のことが分かるが、このことは $[G, \mathcal{L}]$ の決定は半単純群の問題に帰着されることを示す。

$$1) \quad [S', \mathcal{L}] = \gamma \in \pi_{\gamma'}^S \quad (\text{ホップ写像})$$

$$2) \quad G \text{ は非可換, 且つ } Z(G) \cap T \text{ (輪環群) を含ばず}$$

$$[G, \mathcal{L}] = [T, \mathcal{L}][G/T, \mathcal{L}]$$

$$3) \quad [G, \mathcal{L}][H, \mathcal{L}] = [G \times H, \mathcal{L}]$$

1) と同様に $[S', \mathcal{L}]$ は $\pi_{\gamma'}^S$ のホップ写像 γ を表すことが分かる。更に $SO(3)$ については $[SO(3), \mathcal{L}] = 2\gamma$ が示されている [7]。

又 2) から $[U(n), \mathcal{L}] = \gamma[SU(n), \mathcal{L}]$ をえる。

階数 2 の単純群については、最初に Smith [7] によって $[Sp(2), \mathcal{L}] = \beta, (3) \in \pi_{\beta,0}^S$, $[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_{\bar{\nu}}^S$ が証明され、つづいて Steer [8] と Wood [9] によって $[SU(3), \mathcal{L}] = \bar{\nu} \in \pi_{\bar{\nu}}^S$, $[G_2, \mathcal{L}] = \kappa \in \pi_{\kappa,4}^S$ が証明された。その後 Becker-Schultz [2], Knapp [4] と続くが結果については Ossa の表を次に掲げて

おく。Becker-Schultz はこれらの結果から [2] (1977) の中で次の予想を立てた。 $\text{rank } G \geq 10$? 否 $[G, \mathbb{Z}] = 0$

rk	d	G	$[G, \mathbb{Z}]$	π_{α}^S
1	3	$SU(2)$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}_{24} \cdot \mathbb{Z}$
		$SO(3)$	$2\mathbb{Z}$	
2	8	$SU(3)$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}$
	10	$Sp(2)$	$B_1(3)$	\mathbb{Z}_6
		$SO(5)$	$-B_1(3)$	
	14	G_2	\mathbb{K}	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{K}$
	6	$SO(4)$	0	
3	15	$SU(4)$	$\mathbb{K}\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_{480} \oplus \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{K}\mathbb{Z}$
		$SO(6)$	0	
	21	$Spin(7)$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
		$SO(7)$	0	
		$Sp(3)$	$\sigma^3 + \mathbb{K}\mathbb{Z}$	
4	24	$SU(5)$	$\mathbb{Z}^* \sigma \mathbb{Z} \text{ or } 0$	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}^* \sigma \mathbb{Z}$
		$Spin(9)$	0	\mathbb{Z}_6
	36	$SO(9)$	0	
		$Sp(4)$?	
		$Spin(8)$	0	\mathbb{Z}_2
	28			

	$SO(8)$	0	
F_4	F_4	?	$Z_3 \oplus 2\text{-primary}$

註) 岡氏から $[SU(5), \mathbb{Z}] = 0$ であることを教えられた (H. U. Schöen の結果)。

3 先の四氏の主定理を述べる。

Becker-Schultz K を G の閉部分群とする。 $K \times G \rightarrow K$ を K 上の積バンドル, $f: K \times G \rightarrow K \times G$ を $f(k, g) = (k, kg)$, $k \in K, g \in G$ で定義されるバンドル写像とする。また Dold の f の不動点指数 $I(f) \in \pi_5^0(K_+)$ を $I_K(G)$ で表す。

$U \subset G$ を単位元の局所座標近傍とし, 自然な射影 $G_+ \rightarrow G/G-U = S^d$ を π で表す。このとき, $\pi_*^S = \pi_*^0(S^d) \xrightarrow{\pi^*} \pi_*^0(G_+)$ は単射で, 且つ $\pi^*[G, \mathbb{Z}] = I_G(G)$ なることが分かる。

定理 $I_K(G) = \chi(G/K) I_K(K)$,

とくに $G \supset K$ なら $I_K(G) = 0$, 即ち $\chi(G/K)[K, \mathbb{Z}] = 0$ 。

但し, $\chi(-)$ は Euler の標数を示す。

例 $\chi(SO(2n)/U(n)) = 2^{n-1}$, $\chi(SU(n+1)/U(n)) = n+1$,

$\chi(SO(2n+1)/SO(2n)) = 2$, $\chi(G_2/SO(4)) = \chi(F_4/Spin(9)) = 3$ 。

これより $[U(2n), \mathbb{Z}] = 2[SO(2n), \mathbb{Z}] = 3[SO(4), \mathbb{Z}] = 3[Spin(9), \mathbb{Z}]$
 $= 0$ をえる。

Knapp Adams スペクトル系列

$$E_2^{i,j} = Ext_{BP_*BP}^{i,j}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi_{j-i}^S$$

のフィルター付けを

$$\pi_d^S \supset \dots \supset F^{k,d+k} \supset F^{k+1,d+k+1} \supset \dots$$

とするとき、次の結果を証明した。

定理 $[G, \mathbb{Z}]_{(p)} \in F^{\text{rank } G, d + \text{rank } G}$

註) この言葉で Atiyah-Smith [1] の結果は次の様に記述される: $e_c [G, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0$ であるための必要十分条件は $[G, \mathbb{Z}]_{(p)} \in F^{2, d+2}$ である。

この定理と $E_2^{i,j}$ の消滅に関する Zahler, Miller の結果を用いて次の結果を得た。

$$[SU(2n+1), \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (2n < p(p-1)-2),$$

$$[F_4, \mathbb{Z}]_{(p)} = [E_6, \mathbb{Z}]_{(p)} = [E_7, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (p \geq 5), \quad [E_8, \mathbb{Z}]_{(p)} = 0 \quad (p \geq 7).$$

他の手法によって $[F_4, \mathbb{Z}]_{(3)} = 0$ が証明されている。

Q.1.1a S を G のサークル部分群, V を S の非自明な

一次元複素表現とする。また $\tau: \Sigma' CP_+^\infty \rightarrow QS^0$ を S' -物送写像とする。このとき $\tau_*: \pi_{\alpha-1}^S(CP_+^\infty) \rightarrow \pi_\alpha^S$ は $[G/S, \mathcal{L}, \mathcal{S}]$ を $[G, \mathcal{L}]$ に移すことが知られている。こゝで $\mathcal{S}: G \times_S V \rightarrow G/S$, $B \in \tilde{K}(S^0)$ を Bott 要素, $[G/S] \in \pi_{\alpha-1}^S(G/S_+)$ を G/S の基本類とするとき, 次の定理を証明した。

定理 $\tau_*[G/S, \mathcal{L}, \mathcal{S}] = -\langle J(B\mathcal{S}), [G/S] \rangle$

即ち $[G, \mathcal{L}] = -\langle J(B\mathcal{S}), [G/S] \rangle$ 。但し, J は複素 J -写像を, \langle, \rangle はクロネッカー積を表す。

これは次の Knapp の結果を用いて示される:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' CP_+^\infty & \xrightarrow{\tau} & QS^0 \\ R \downarrow & \nearrow J & \\ U & & \end{array}$$

は反可換である。こゝで R は反射写像を示す。

S をうまく選べ, $J(B\mathcal{S})$ に Adams 予想を適用して \mathcal{S} の冒頭に述べた定理を証明した。

4. 命題 7 の証明 M を $(n+8)$ 次元可微分 S^2 -閉多様体で, その接バンドル τ について次のバンドル同型をもつとする。

$$\bar{\Phi} : \tau \otimes \underline{R^L \oplus jL} \xrightarrow{\cong} \underline{R^{L+j} \oplus (j+P)L}$$

(ある $\bar{\alpha}_j$ に対して)。こゝで L は R の非自明な一次元実表現

を、 A は A をファイバーにもつ積バンドルを表す。このとき

$(M, \bar{\Phi})$ を $(p, \bar{\Phi})$ -枠組をもつ多様体と呼ぶことにする。

$(M, \bar{\Phi})$ で R の作用を忘れるとき、またその固定点集合を考えると、それは枠組をもつ多様体になる。それらを

$(M, \varphi\bar{\Phi}), (M^Z, \varphi\bar{\Phi})$ で表す。

$\pi_{p, \bar{\Phi}}^S$ を Landweber [5] の同変安定ホモトピー群, i.e.

$$\pi_{p, \bar{\Phi}}^S = \varinjlim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} [\Sigma^{p+\bar{\alpha}, \bar{\beta}+\bar{\beta}} / \Sigma^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, \Sigma^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = (R^{\bar{\alpha}} \otimes jL) \cup \{0\}, \text{ とすると,}$$

$(M, \bar{\Phi})$ は同変トム・ポントラーギン構成法で $\pi_{p, \bar{\Phi}}^S$ の要素 $[M, \bar{\Phi}]$ を定義する。この M に対して次の結果を得る。

命題2 p が奇数なら, $[M, \varphi\bar{\Phi}]_{(odd)} = 0$

例 M として命題1の G をとると, G は $(d-\dim K, \dim K)$ -枠組をもつ多様体になる。従って, これから命題1を得る。

命題2の証明 $\lambda_{p, \bar{\Phi}}^S = \varinjlim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} [\Sigma^{p+\bar{\alpha}, \bar{\beta}+\bar{\beta}} / \Sigma^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, \Sigma^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}]$ とおく

と, このファイブレーション $\Sigma^{0, \bar{\beta}} \rightarrow \Sigma^{p, \bar{\beta}} \rightarrow \Sigma^{p, \bar{\beta}} / \Sigma^{0, \bar{\beta}}$ は完全列

$$\rightarrow \lambda_{p, \bar{\Phi}}^S \rightarrow \pi_{p, \bar{\Phi}}^S \xrightarrow{\varphi} \pi_{\bar{\Phi}}^S \rightarrow \lambda_{p, \bar{\Phi}-1}^S \rightarrow \dots$$

を定義する[5]。こゝで φ は $\varphi[M, \bar{\Phi}] = [M^Z, \varphi\bar{\Phi}]$ を満たす。

\mathbb{Z}_2 -同型 $J: R^{i+\varepsilon} \oplus (j+p)L \rightarrow R^{i+\varepsilon} \oplus (j+p)L$ を $J(x_1, \dots, x_{2+\varepsilon}, y_1, \dots, y_{j+p}) = (x_1, \dots, x_{2+\varepsilon}, -y_1, y_2, \dots, y_{j+p})$ で定義するとき, $\psi[M, \Phi] = \psi[M, J \cdot \Phi]$, 更に $\psi: \pi_{p, \varepsilon}^S \rightarrow \pi_{p+\varepsilon}^S$ を忘却写像とすると, $\psi[M, J \cdot \Phi] = -\psi[M, \Phi] = -[M, \psi\Phi]$.

ところで, 双対定理を用いて同型 $\lambda_{p, \varepsilon}^S \cong \pi_{2^a + \varepsilon}^S (P^\infty / P^{2^a - p - 1})$ ($a \gg p, \varepsilon$) を得る[3]. ここで P^i は実射影 i -空間を表す.

$\tilde{H}_*(P^{2N}/P^{2a}, \mathbb{Z})$ は 2-torsion であるので, Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列から, p が奇数なら $\lambda_{p, \varepsilon}^S, \lambda_{p, \varepsilon-1}^S$ は 2-torsion であることが分かる. 従って上の完全列から $[M, \Phi]_{(odd)} = [M, J \cdot \Phi]_{(odd)}$, 従って $[M, \psi\Phi]_{(odd)} = -[M, \psi\Phi]_{(odd)}$ を得る.

文 献

- 1 Atiyah - Smith: Compact Lie groups and stable homotopy of spheres, *Topology* 13 (1974), 135-142.
- 2 Becker - Schultz: Fixed point indices and left invariant framings, *Lecture Notes in Math.* 657, Springer, 1978, 1-31.
- 3 Bredon: Equivariant stable stems, *Bull.*

- Amer. Math. Soc. 73 (1967), 269-273.
4. Knapp: Rank and Adams filtration of a Lie groups, *Topology* 17 (1978), 41-52.
 5. Landweber: On equivariant maps between spheres with involutions, *Ann. of Math.* 89 (1969), 125-137.
 6. Ossa: Lie groups as framed manifolds, *Topology* 21 (1982), 315-323.
 7. Smith: Framings of sphere bundles over spheres, the plumbing pairing, and the framed cobordism classes of rank 2 simple Lie groups, *Topology* 13 (1974), 401-415.
 8. Steer: Orbits and the homotopy class of a compactification of a classical map, *Topology* 15 (1976), 383-393.
 9. Wood: Framing the exceptional Lie group G_2 , *Topology* 15 (1976), 303-320.